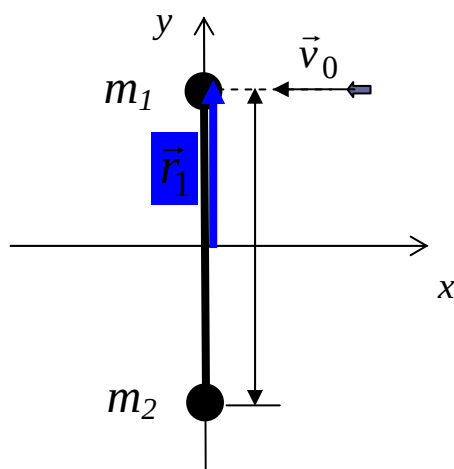


Questão 1

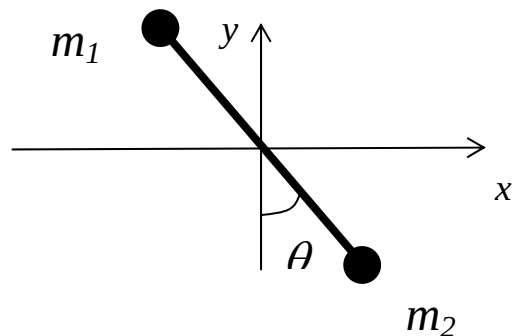
Uma vara rígida, de massa desprezável, tem duas esferas ligadas às suas extremidades (ver figura). As esferas, ambas com raio $R = 5$ cm, têm massas $m_1 = 300$ g e $m_2 = 200$ g e os seus centros de massa distam $d = 40$ cm. Este sistema, inicialmente na vertical, está sujeito apenas à acção da gravidade e pode rodar livremente em torno do ponto médio da vara que está fixo.

Uma bala de 10 g e que se pode considerar pontual, atinge, com velocidade igual a 40 m/s, a esfera m_1 onde fica incrustada.

- Considere que o processo de incrustação é instantâneo. Determine o vector (directão, sentido e intensidade) momento angular total do sistema em relação à origem do referencial, imediatamente depois da bala ficar incrustada na esfera.
- Tendo em conta que o momento de inércia do sistema vara-esferas-bala não difere significativamente do momento de inércia do sistema vara-esferas, calcule a velocidade angular do sistema e a velocidade linear do centro de massa de cada uma das esferas no instante a que se refere a alínea anterior.



Antes da bala atingir a esfera



Depois da bala atingir a esfera

Resolução

a) Como o processo de incrustação é instantâneo o momento angular do sistema imediatamente depois da incrustação da bala é igual ao momento angular da bala no instante da incrustação. Calculado relativamente à origem do referencial ele é:

directão : perpendicular ao plano xy (plano da folha)

$$\vec{L}_b = \vec{r}_1 \times m_b \vec{v}_0$$

sentido : "para cá" da folha

intensidade : $\|\vec{r}_1\| m_b \|\vec{v}_0\| \sin(90^\circ)$

onde $\vec{r}_1$ é o vector posicional do ponto de incrustação (ver figura).

$$\|\vec{L}_b\| = \frac{d}{2} m_b \|\vec{v}_0\| = \frac{4 \times 10^{-1}}{2} \times 10^{-2} \times 4 \times 10 = 8,0 \times 10^{-2} \text{ kgm}^2 \text{s}^{-1}$$

b) A velocidade angular do sistema num dado instante relaciona-se com o momento angular nesse instante através de $\vec{L} = I\vec{\omega}$, onde I é o momento de inércia do sistema relativamente ao eixo de rotação, isto é, o eixo com a directão de $\vec{L}$ e que passa na origem do sistema de referência da figura.

O momento de inércia do sistema vara-esferas calculado relativamente a este eixo é:

$$I = \left[\frac{2}{5} m_1 R^2 + m_1 \left(\frac{d}{2} \right)^2 \right] + \left[\frac{2}{5} m_2 R^2 + m_2 \left(\frac{d}{2} \right)^2 \right]$$

Cada um dos termos entre parêntesis rectos é o momento de inércia devido a cada uma das esferas relativamente ao eixo de rotação calculado usando o teorema dos eixos paralelos.

$$I = (m_1 + m_2) \times \left[\frac{2}{5} R^2 + \left(\frac{d}{2} \right)^2 \right] = 5 \times 10^{-1} \times (10^{-3} + 4 \times 10^{-2}) = 2,05 \times 10^{-2} \text{ kgm}^2$$

Pretendemos calcular a velocidade angular no instante em que $\vec{L} = \vec{L}_b$ (calculado na alínea anterior). Temos, portanto:

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{L}_b}{I} \Rightarrow \omega = \frac{8,0 \times 10^{-2}}{2,05 \times 10^{-2}} \approx 4 \text{ rad s}^{-1}$$

A direcção e o sentido são os mesmos que de $\vec{L}_b$

Como os centros de massa das esferas estão nesse instante a iniciar movimentos circulares de raio $d/2$ com velocidade angular 4 rad s^{-1} , a sua velocidade linear é

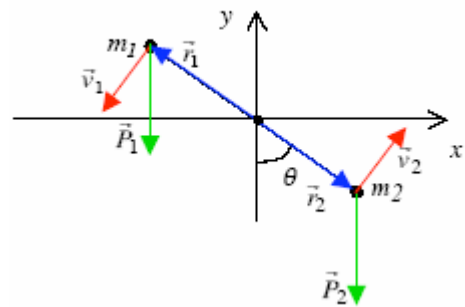
$$v_{CM} = \omega \frac{d}{2} = 4 \times 0,2 = 0,8 \text{ m/s}$$

Questão 2

Para o mesmo sistema da questão 1, a partir da relação entre a variação do momento angular e o momento das forças exteriores que actuam no sistema (tenha em conta a figura), obtenha a expressão para a aceleração do sistema após a incrustação da bala:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{2g(m_1 - m_2)}{d(m_1 + m_2)} \sin\theta$$

Comente a seguinte afirmação referindo-se à relação entre o momento das forças exteriores e a velocidade angular: “Se $m_1 = m_2$ o sistema rodará com velocidade angular constante”.



Resolução

O momento angular total do sistema relativamente à origem do referencial é :

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2$$

$$\vec{L}_1 = m_1 \|\vec{r}_1\| \|\vec{v}_1\| \vec{e}_z = m_1 \frac{d}{2} \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_z \quad \text{e} \quad \vec{L}_2 = m_2 \|\vec{r}_2\| \|\vec{v}_2\| \vec{e}_z = m_2 \frac{d}{2} \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_z$$

Tal como na alínea b) foi usada a relação entre a velocidade linear e a velocidade angular para cada uma das partículas, $v = \frac{d}{2} \omega = \frac{d}{2} \frac{d\theta}{dt}$. O versor tem a direcção perpendicular ao plano do movimento (xy) e aponta “para cá da folha”.

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \frac{d^2}{4} \frac{d\theta}{dt} (m_1 + m_2) \vec{e}_z \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d^2}{4} \frac{d^2\theta}{dt^2} (m_1 + m_2) \vec{e}_z \quad (1)$$

O momento resultante dos momentos das forças exteriores aplicadas a um sistema, calculado relativamente a um ponto é responsável pela variação do momento angular total do sistema em relação a esse ponto:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (2)$$

As forças exteriores aplicadas ao sistema em estudo que têm momento relativamente à origem são as forças gravíticas que actuam nas partículas 1 e 2, respectivamente $\vec{P}_1$ e $\vec{P}_2$. Os seus momentos são:

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{P}_1 = \frac{d}{2} m_1 g \sin(\theta) \vec{e}_z \quad \text{e} \quad \vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{P}_2 = -\frac{d}{2} m_2 g \sin(\theta) \vec{e}_z$$

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \frac{d}{2} g \sin(\theta) (m_1 - m_2) \vec{e}_z \quad (3)$$

Substituindo em (2) os resultados (1) e (3), obtemos a equação do movimento:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{2g(m_1 - m_2)}{d(m_1 + m_2)} \sin(\theta)$$

Para $m_1 = m_2$, os momentos devidos a cada um dos pesos cancelam-se. Sendo nulo o momento das forças externas o momento angular do sistema não varia no tempo e consequentemente a velocidade angular é uma constante do movimento. Note-se que, para $m_1 = m_2$, a expressão que obtivemos na alínea anterior para a aceleração angular $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ conduz a valor zero como é de esperar tendo em conta a discussão anterior.